Rapport de Pierre Julg sur la thèse de M. Omar Mohsen

Le sujet de la thèse est au coeur de la géométrie non commutative d'Alain Connes, qui est un domaine connexe à celui des algèbres d'opérateurs et à celui de la théorie de l'indice. Une notion essentielle à la géométrie non commutative est celle de groupoïde. Au début des années 1980, Alain Connes a défini le *groupoïde tangent* $G(M)$ associé à une variété différentiable M. Ses objets sont les couples (x,t) formés d'un point de M et d'un paramètre réel t; les flèches sont de deux sortes: il y a pour tout $t \neq 0$ les flèches (x,y,t) allant de (y,t) vers (x,t) et pour $t=0$ les vecteurs tangents $X \in T_xM$ vus comme flèche de $(x,0)$ vers lui-même. La structure de groupoïde est donnée : sur $M \times M \times \{t\}$ $(t \neq 0)$ par le celle du groupoïde des couples, sur $T_xM \times \{0\}$ par l'addition des vecteurs dans l'espace T_xM. Enfin Alain Connes définit ainsi la topologie (et la structure de variété) sur $G(M)$: on recolle $M \times M \times \{t\}$ lorsque $t \to 0$ sur $T_xM \times \{0\}$ en déclarant que (x,y,t) tend vers $(X,0)$ si $\frac{y-x}{t} \to X$ (dans une carte locale). Ce groupoïde avait été introduit pour donner une interprétation élégante de l'application indice en K-théorie. Mais récemment un regain d'intérêt s'est manifesté pour ce groupoïde, avec les travaux de Claire Debord et Georges Skandalis d'une part, de Erik van Erp et Robert Yuncken d'autre part. On comprend maintenant comment le calcul pseudodifférentiel peut-être défini uniquement à partir du groupoïde $G(M)$. D'où la question de comprendre d'autres calculs pseudodifférentiels à l'aide de groupoïdes.

Dans le premier chapitre de sa thèse, après un bel exposé introductif aux groupoïdes, M. Omar Mohsen expose une notion fondamentale de géométrie différentielle: celle de *déformation au cône normal*. Etant donné une variété M et une sous-variété V, on déforme selon un paramètre réel t, la variété M en l'espace total du fibré normal N de V dans M. Autrement dit on construit une variété $DNC(M,V)$ qui fibre au dessus de la droite réelle: la fibre en $t \neq 0$ n'est autre que M tandis que la fibre en $t=0$ est la variété N. Le point fondamental, mis en lumière par Claire Debord et Georges Skandalis, est la *fonctorialité* de cette construction par rapport aux applications C^∞. Il en résulte que la déformation d'un groupoïde de Lie par rapport à un sous-groupoïde est elle-même un groupoïde de Lie. AInsi $G(M)$ est la déformation $DNC(M \times M, M)$ pour l'injection diagonale de M (groupoïde trivial) dans $M \times M$ (groupoïde des paires).

Ceci est le point de départ de la contribution essentielle de M. Omar Mohsen, qui est le coeur de cette thèse et qui en constitue le chapitre 3. Il s'agit de comprendre le groupoïde correspondant aux calculs pseudodifférentiels généralisés adaptés à l'étude d'opérateurs du type "laplacien de Kohn" , c'est-à-dire d'opérateurs différentiels du second ordre $L = -\sum_i X_i^2$ où la famille des champs de vecteurs X_i *et de ses crochets de Lie itérés* engendre l'espace tangent en chaque point. On sait que ces opérateurs ne sont en général pas elliptiques, mais hypoelliptiques. Ils possèdent des paramétrix qui ne sont pas des opérateurs pseudodifférentiels classiques, mais qui appartiennent à des classes plus générales. De tels calculs pseudodifférentiels ont été construits depuis longtemps (Beals et Greiner; Christ, Geller, Głowacki et Polin; Melin...). Ils font intervenir, au lieu de l'analyse de Fourier sur le fibré tangent en chaque point, la théorie des représentations d'un groupe de Lie nilpotent gradué associé à chaque point. Ce groupe apparaît via son algèbre de Lie de la façon suivante: on part d'une filtration du fibré tangent TM par des sous-fibrés $H_1 \subset H_2 \subset ... \subset H_k \subset TM$ vérifiant la condition suivante sur les crochets de Lie: si X_i et X_j sont des sections de $H_i$et H_j respectivement, alors $[X_i, X_j]$ est une section de H_{i+j}. Alors en chaque point $x \in M$, le fibré gradué associé

$$H_1 \oplus H_2/H_1 \oplus ... \oplus H_k/H_{k-1} \oplus TM/H_k$$

est muni fibre par fibre, d'une structure d'algèbre de Lie nilpotente graduée. On considère alors le groupe de Lie associé T_HM. Le groupoïde $G_H(M)$ sous-jacent aux calculs pseudodifférentiel considéré s'obtient en remplaçant dans la définition du groupoïde tangent le groupe abélien T_xM par le groupe nilpotent gradué $T_{H,x}M$. Il est cependant délicat de définir correctement la topologie sur $G_H(M)$ autrement dit de décrire comment un élément de $M \times M \times \{t\}$ tends vers un élément du groupe $T_{H,x}M$ lorsque $t \to 0$.

La solution remarquable de M. Omar Mohsen consiste à itérer le processus de déformation au cône normal de la façon suivante. Traitons d'abord le cas d'un sous-fibré H de TM. Le groupoïde tangent de Connes $G(M) = DNC(M \times M, M)$ admet $H \times \{0\} \subset TM \times \{0\}$ pour sous-groupoïde. Omar Mohsen considère alors la déformation au cône normal $DCN(G(M), H \times \{0\})$ qui fibre au dessus de $M \times \mathbf{R}^2$. En se restreignant alors à la fibre au dessus de $M \times \{1\} \times \mathbf{R}$ il obtient le groupoïde cherché $G_H(M)$. Pour continuer le processus dans le cas d'une filtration $H_1 \subset H_2 \subset TM$, on a besoin que $H_1 \oplus H_2/H_1 \times \{0\}$ soit un sous-groupoïde de $G_{H_1}(M)$. Or c'est précisément ce qu'assure le fait que le crochet de deux champs dans H_1 soit dans H_2. On considère alors la déformation au cône normal $DCN(G_{H_1}(M), H_1 \oplus H_2/H_1 \times \{0\})$ qui est un groupoïde fibrant sur $M \times \mathbf{R}^2$ et qu'à nouveau on restreint à la fibre au dessus de $M \times \{1\} \times \mathbf{R}$ pour obtenir le groupoïde cherché $G_{H_1,H_2}(M)$. Et ainsi de suite.

Cette construction simple du groupoïde $G_H(M)$ rend conceptuelles les constructions de van Erp, de Ponge et de leurs collaborateurs respectifs. On évite ainsi les constructions analytiques compliquées (connexions et coordonnées adaptés, etc). L'aspect géométrique est remarquablement mis en valeur.

Le chapitre 2 donne une autre illustration fort jolie de la méthode de la déformation au cône normal. Omar Mohsen revisite un article du physicien théoricien E. Witten (1983). Si M est une variété différentiable compacte et f une fonction de Morse (ayant donc un nombre fini de points critiques), alors les nombres de Betti de M et les nombres de points critiques de chaque indice sont reliés par des inégalités classiques, dites de Morse. Partant du complexe de de Rham d et d'un Laplacien associé $\Delta = dd^* + d^*d$, Witten utilisait la fonction de Morse pour le déformer : $d_t = e^{-f/t}de^{f/t} = d + t^{-1}\mathrm{ext}(df)$ et $\Delta_t = d_td_t^* + d_t^*d_t = \Delta + t^{-2}\|df\|^2 + t^{-1}A(df)$ où le dernier terme est un endomorphisme de fibré. Voir le bel exposé Bourbaki de G. Henniart pour suivre l'étude faite par Witten de spectre de Δ_t lorsque $t \to 0$: les valeurs propres s'en vont vers l'infini, sauf un nombre fini d'entre elles qui correspondent aux points critiques (l'indice du point étant le degré des formes).

Omar Mohsen donne une interprétation extrêmement limpide de cette analyse, en utilisant un cas très simple de déformation au cône normal et l'analyse sur les C^*-modules hilbertiens. Soit C l'ensemble des points critiques de f, alors la déformation $DNC(M, C)$ est une variété qui fibre au dessus de $\mathbf{R}$ la fibre étant M partout sauf en $t = 0$ où la fibre est la réunion disjointe des espaces tangents T_aM en chacun des points critiques $a \in C$. Alors les espaces de formes L^2 dans chaque fibre sont des espaces de Hilbert qui forment un champ continu au dessus de $\mathbf{R}$, dont les sections sont un $C_0(\mathbf{R})$-module hilbertien. Quant à l'opérateur de Witten, il vaut d_t au dessus de chaque $t \neq 0$ tandis qu'en $t = 0$ on a en chaque point critique $a \in C$ l'opérateur $d_0 = e^{-h_a}de^{h_a} = d + \mathrm{ext}(dh_a)$ sur l'espace T_aM où h_a est la forme quadratique hessienne de f en a. L'opérateur de Witten global est alors un opérateur à résolvante compacte dans le $C_0(\mathbf{R})$-module Hilbertien.

Enfin le chapitre 4 de la thèse, indépendant des autres, interprète les invariants secondaires de Chern-Simons (associés à un fibré plat sur une variété différentiable compacte M) dans le cadre de la KK-théorie (à coefficients réels) de G. Kasparov. On voit apparaître dans cette interprétation la C^*-algèbre du groupoïde de l'action du groupe $\Gamma = \pi_1(M)$ sur l'espace sous-jacent au groupe unitaire U_n via la représentation d'holonomie d'une connexion plate. Puis Omar Mohsen considère un groupoïde G plus primitif: celui de l'action du groupe (discret) U_n sur lui-même (comme espace). Il interprète alors l'invariant de Chern-Simons universel comme un élément d'un groupe de KK théorie réelle équivariante par rapport au groupoïde G au sens de P.Y. Le Gall.

En résumé, la thèse de M. Omar Mohsen est d'une qualité exceptionelle et je ne peux que recommander avec enthousiasme sa soutenance.

Pierre Julg
Professeur à l'Université d'Orléans

P. J.

Université d'Orléans
Bâtiment de Mathématiques
B.P. 6759
45067 Orléans cedex 2
France