C.N.R.S. – Université Paris Diderot
Institut de Mathématiques de
Jussieu Paris Rive Gauche (UMR 7586)
Algèbres d'opérateurs et représentations

Université Paris Diderot (Paris 7)
UFR de Mathématiques, CP **7012**
Bâtiment Sophie Germain
5 rue Thomas Mann
F-75205 Paris CEDEX 13

Georges Skandalis
e-mail : georges.skandalis@imj-prg.fr
skandalis@math.univ-paris-diderot.fr
tél. +33 1 57 27 91 21
Fax +33 1 57 27 91 69

Présentation du mémoire
de thèse d'Omar MOHSEN

Le mémoire de thèse d'Omar MOHSEN porte sur les groupoïdes de Lie et la géométrie non commutative. Malgré son très jeune âge, Omar y montre une maturité mathématique étonnante et un goût affirmé.

Le mémoire comporte un chapitre introductif sur les groupoïdes, trois parties principales et deux appendices. Les parties principales feront chacune à mon avis une très bonne publication. Toutes trois portent sur les groupoïdes de Lie ; les deux premières sur les déformations de groupoïdes de Lie ; la troisième sur la K-théorie bivariante des C^*-algèbres et les invariants secondaires.

1. La première partie (chapitre 2), porte sur la déformation de Witten - à l'aide d'un groupoïde de Lie de déformation ;
2. la deuxième partie (chapitre 3), donne une construction très directe d'un groupoïde de déformation donnant lieu à un calcul pseudodifférentiel de type hypoelliptique pour des groupoïdes de Lie ;
3. la troisième partie (chapitre 4), donne une belle description des invariants de Chern-Simons dans la K-théorie bivariante de Kasparov équivariante par un groupoïde.

Les groupoïdes de déformation ont été pour la première fois utilisés en géométrie non commutative par Alain Connes qui, pour une variété compacte M, a décrit une déformation du groupoïde des paires $M \times M$ vers le fibré tangent TM - vu comme famille de groupes. Il a démontré que cette déformation « contient » l'indice analytique d'Atiyah-Singer, et en a déduit une démonstration très naturelle du théorème de l'indice.

Cette construction a inspiré plusieurs auteurs. En fait, il s'agit de la construction de déformation au cône normal, « classique » en géométrie algébrique - très reliée à la notion d'éclatement. Une remarque clé est que la déformation au cône normal de l'inclusion d'un sous-groupoïde de Lie dans un groupoïde de Lie on obtient encore un groupoïde de Lie.

C'est sur cette idée de déformation au cône normal que sont basés les deuxième et troisième chapitres du mémoire d'Omar Mohsen. Il y utilise des déformations au cône normal pour des groupoïdes qu'il applique à d' importantes situations géométriques.

La première déformation utilisée par Omar est liée à la déformation de Witten. Étant donnée une fonction de Morse f sur une variété compacte M, Witten considère la différentielle extérieure modifiée $d_t = e^{-\frac{f}{t}}\, d\, e^{\frac{f}{t}}$ et le laplacien associé $\Delta_t = d_t^* d_t + d_t d_t^*$. La dimension de noyau (en degré i) de ce laplacien ne dépend pas de t et est égale au i-ème nombre de Betti de M. Witten étudie l'asymptotique des valeurs propres de Δ_t et en déduit une jolie démonstration des inégalités de Morse.

En effectuant la déformation au cône normale de l'inclusion de l'ensemble (fini) $\mathrm{Crit}(f)$ des points critiques de f dans le groupoïde des paires $M \times M$, on construit un groupoïde de Lie. Omar Mohsen démontre que la famille $t^{-1}\Delta_t$ des laplaciens de Witten définit un multiplicateur non borné de la C^*-algèbre de ce groupoïde, dont la résolvante est dans la C^*-algèbre du groupoïde. Cela lui permet de retrouver immédiatement le comportement des « petites » valeurs propres du laplacien de Witten et donc les inégalités de Morse.

La construction de Mohsen se généralise aisément au cadre des variétés feuilletées et est porteuse de nombreuses possibilités de généralisation et précision.

La deuxième déformation porte sur le calcul pseudodifférentiel « inhomogène » (on dit aussi « filtré » ou « de Carnot »).

Donnons-nous une variété M et une filtration (croissante) $(H_i)_{0\leqslant 1\leqslant k}$ du fibré tangent (avec $H_0 = 0$ et $H_k = TM$) telle que l'on ait $[\Gamma(H_i), \Gamma(H_j)] \subset \Gamma(H_{i+j})]$. Un calcul pseudodifférentiel naturel a été construit à ce cadre, généralisant le cas des variétés de contact (en particulier, en lien avec la géométrie non commutative par Ponge et Van Erp).

Dans ce calcul sous-elliptique ou de Carnot, les champs de vecteurs sections du fibré H_i sont considérées comme des opérateurs différentiels d'ordre i. Comme nous l'avions expliqué avec Claire Debord dans le cas classique, le calcul pseudodifférentiel inhomogène peut être construit directement à l'aide d'un groupoïde de déformation. Ce groupoïde a été construit indépendamment par Choi-Ponge et Van Erp-Yuncken. Ces constructions sont délicates.

Le troisième chapitre du mémoire de Mohsen présente une construction très élégante de ce groupoïde de déformation en termes de déformations au cône normal successives. Dans le cas où il n'y a qu'un seul sous-fibré $H \subset TM$, Mohsen considère juste l'inclusion de $H \times \{0\}$ dans le groupoïde tangent de Connes $(M \times M) \times \mathbb{R}^* \sqcup TM \times \{0\}$. Le fait crucial que l'objet construit est canoniquement un groupoïde est clair dans cette construction - alors qu'il conduit à des calculs relativement sophistiqués dans les travaux cités ci-dessus.

La construction de Mohsen a en plus l'avantage d'être très souple et se généralise immédiatement, par exemple au cadre d'un calcul pseudodifférentiel inhomogène transverse à un feuilletage.

Le quatrième chapitre de Mohsen utilise les groupoïdes de Lie pour leur KK-théorie de Kasparov équivariante - construite par Le Gall.

Chern et Simons associent une classe de transgression à tout fibré vectoriel muni de deux connexions plates sur une variété M. Cette classe est dans la cohomologie à coefficients complexes $H^*(M, \mathbb{C})$. Atiyah-Patodi-Singer ont utilisé la classe $\alpha \in K^*(M, \mathbb{C})$ ([1]) dont l'image par l'isomorphisme de Chern est la classe de Chern Simons. Ils ont démontré que l'accouplement de cette classe avec un opérateur différentiel elliptique est l'invariant η. Ils ont suggéré que cette classe devait s'exprimer directement en termes d'algèbres de von Neumann - afin d'obtenir des classes à coefficients réels (ou complexes dans le cas non unitaire).

Dans son quatrième chapitre, une version primitive de la classe α est construite - du moins dans un fibré muni d'une connexion plate *unitaire* (et d'une trivialisation). Un fibré vectoriel complexe plat et trivial sur une variété M est interprété comme un cocycle de M à valeurs dans le groupoïde de transformation U_n^δ (U_n muni de de la structure de groupe discret) agissant sur l'espace U_n. L'élément α de Mohsen vit dans la KK-théorie équivariante de ce groupoïde - $KK^1_{U_n \rtimes U_n^\delta; \mathbb{R}}(C(U_n), C(U_n))$ dans les notations de Le Gall.

L'élément α d'un fibré plat trivial est le tiré en arrière dans M de cet élément primitif par le « cocycle classifiant ».

Ce mémoire est donc basé sur trois constructions originales, astucieuses, profondes et surtout particulièrement élégantes. Chacun des chapitres présentés résulte d'une idée limpide, qui simplifie spectaculairement des calculs relativement compliqués ou donnent un point de vue novateur. Ses constructions ouvrent la porte à des généralisations importantes de théories existantes. Omar Mohsen y démontre une grande aisance technique, et une culture mathématique étonnante. Il montre surtout une profondeur et une originalité hors du commun.

Ce mémoire constitue à mon avis une thèse de grand niveau.

Georges SKANDALIS

1. Dans le cas où on a juste une connexion plate, on obtient une classe dans $K^*(M, \mathbb{C}/\mathbb{Z})$.